/ /   المحاضرة السادسة..

مراجعة لبرامتر راو: $V(T) \geq \frac{(\psi'(\alpha))}{J_1}$

البرهان: لدينا بالفرض $ET = \psi(\alpha)$ كون T هو المقدر للوسيط α وبالتالي:

$$\int_{R_n} t L \, dx = \psi(\alpha) \quad \dots ①$$

نشتق طرفي العلاقة ① بالنسبة لـ α نجد:

$$\int_{R_n} t \frac{dL}{d\alpha} dx = \psi'(\alpha) \Rightarrow \int_{R_n} t \frac{d \ln L}{d\alpha} L \, dx = \psi'(\alpha)$$

$$\Rightarrow ET . \frac{d \ln L}{d\alpha} = \psi'(\alpha) \quad \dots ②$$

ومن المعلوم لدينا أن: $Cov(X, Y) = EXY - EXEY$

$$Cov(T . \frac{d \ln T}{d\alpha}) = E(T . \frac{d \ln L}{d\alpha}) - ET \, E[\frac{d \ln L}{d\alpha}] =$$

$$E(T . \frac{d \ln L}{d\alpha})$$

ولدينا أيضاً:

$$\rho(T . \frac{d \ln L}{d\alpha}) = \frac{Cov(T . \frac{d \ln L}{d\alpha})}{\sqrt{VT} . \sqrt{V(\frac{d \ln L}{d\alpha})}}$$

ولدينا مبرهنة تقول:

$$\left| \rho(L . \frac{d \ln L}{d\alpha}) \right| \leq 1 \Rightarrow \left| \frac{Cov(T . \frac{d \ln L}{d\alpha})}{\sqrt{V(t)} . \sqrt{\frac{d \ln L}{d\alpha}}} \right| \leq 1$$

بالتربيع نجد:

$$\frac{Cov^2(T, \frac{d \ln L}{d\alpha})}{V(T) \, V(\frac{d \ln L}{d\alpha})} \leq 1 \Rightarrow V(T) \geq \frac{Cov^2(T . \frac{d \ln L}{d\alpha})}{I_L}$$

معادلة فيشر

Farah Notebook

$$\Rightarrow V(T) \geq \frac{(\psi'(a))^2}{I_L}$$

في الحالة العادية $V(T) \geq 0$

في الحالة الخاصة: $\psi(a) = a$ فإن:

$$V(T) \geq \frac{1}{I_L}$$

نفرض لدينا مجتمعاً إحصائياً طبيعياً $X \sim N(5, \sigma^2)$ لنأخذ عينة عشوائية حجمها n ولتكن:

$T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - 5)^2$ مقدراً نقطياً للوسيط σ^2 المجهول في المجتمع

المطلوب: هل المقدر النقطي T للوسيط σ^2 مقدر متسق ذو تباين أصغري:

$$\frac{nT}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - 5}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n) \Rightarrow$$

$$E\left(\frac{nT}{\sigma^2}\right) = n \Rightarrow \frac{n}{\sigma^2} ET = n \Rightarrow ET = \sigma^2$$

أي أنه المقدر متسقاً أو مقدر متسق:

$$V\left(\frac{nT}{\sigma^2}\right) = 2n \Rightarrow \frac{n^2}{\sigma^4} V(T) = 2n \Rightarrow V(T) = \frac{2\sigma^4}{n} \longrightarrow 0$$

$$n \longrightarrow \infty$$

الآن لنوجد معلومات فيشر ثم نوجد مقلوب هذه المعلومات:

$$L = \prod_{i=1}^{n} f_{x_i}(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i - 5)}{2\sigma^2}}$$

$$\Rightarrow \ln L = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln \sigma^2 - \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - 5)^2}{2\sigma^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d \ln L}{d\sigma^2} = 0 - \frac{n}{2\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - 5)^2}{2(\sigma^2)^2}$$

نشتق مرة أخرى:

$$\frac{d^2 \ln L}{d(\sigma^2)^2} = + \frac{n}{2(\sigma^2)^2} - \frac{\sum (x_i - 5)^2}{(\sigma^2)^3}$$

نضرب بإشارة $(-)$ ومن ثم نوجد التوقع الرياضي:

$\theta = \sigma^2$

$$E\left(-\frac{d^2 \ln L}{d\theta^2}\right) = -\frac{n}{2(\sigma^2)^2} + \frac{\sum^{n} E(x_i - 5)^2}{(\sigma^2)^3}$$

/ /

(التوقع لـ $(x_i - 5)$ هو التباين لـ x_i) ملاحظة

$$= -\frac{n}{2(\sigma^2)^2} + \frac{n\sigma^2}{(\sigma^2)^3} = -\frac{n}{2\sigma^4} + \frac{n}{\sigma^4} = \frac{n}{2\sigma^4} = I_L$$

$$\Rightarrow \frac{1}{I_L} = \frac{2\sigma^4}{n} = V(T)$$

أي أن تحقق المساواة متراجحة كرامر - راو

ومنها نستنتج أن التباين أصغري وعا أن المقدر T وعا أن المقدر T غير متحيز لـ σ^2. ومنها نستنتج أن المقدر T هو غير متحيز وتباينه أصغري ذو تباين أصغري لأنه

مثال آخر: مجتمع احصائي بواسون وسيطه λ ـ لنأخذ منه عينة عشوائية بحجم n : المطلوب:

1) عيّن المقدر الأعظمي للوسيط λ ؟ كما بيناه سابقاً $\hat{\lambda} = \bar{x}$

2) أثبت أن المقدر λ غير متحيز أيضاً أثبت أنه غير متحيز

3) أثبت أنه متسق ؟ أثبت أنه متسق لأنه بيان أن

$$V(T) = V(\bar{x}) = \frac{\lambda}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

4) بين أن $\bar{x} = \hat{\lambda}$ هو مقدر غير متحيز ذو تباين أصغري ؟ غير متحيز أوجدناه بقي أن نثبت أنه تباينه أصغري.

لدينا:

$$L = \prod_{i=1}^{n} P_{x_i}(x_i) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}$$

$$= e^{-n\lambda} \lambda^{\sum x_i} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i!}$$

$$\Rightarrow \ln L = -n\lambda + \sum_{1}^{n} x_i \ln \lambda - \sum_{i=1}^{n} \ln x_i!$$

$$\Rightarrow \frac{d \ln L}{d\lambda} = -n + \frac{\sum x_i}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 \ln L}{d\lambda^2} = \frac{-\sum x_i}{\lambda^2} \Rightarrow -\frac{d^2 \ln L}{d\lambda^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\lambda^2}$$

$$\Rightarrow E\left(-\frac{d^2 \ln L}{d\lambda^2}\right) = I_L = \frac{n\lambda}{\lambda^2} = \frac{n}{\lambda}$$

$$\frac{1}{I_L} = \frac{\lambda}{n} = V(T) = V(\bar{x})$$

هذا يعني أن المقدر النقطي هو مقدر متسق تباينه أصغر

الإحصاءات المرتبة:

$a < x < b$

لنفرض لدينا مجتمعاً احصائياً موصوفاً بدالة ثابتة احتمالية $f(x,\theta)$ حيث أن θ هو الوسيط المجهول ولنأخذ من هذا المجتمع عينة عشوائية حجمها n عندئذ ~~الإحصاءات~~ الإحصاءات المرتبة الموافقة لهذه العينة التي حجمها n سوف تكون لها الشكل:

$$a < Y_1 < Y_2 < Y_3 \dots Y_n < b$$

وسوف نتعرف على كيفية ايجاد دالة الكثافة الاحتمالية لأي احصاء مرتب.. لدينا دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة للإحصاءات المرتبة هي:

$$g(y_1, y_2, \dots y_n) = n! \prod_{i=1}^{n} f_{x_i}(y_i)$$

وبالمكاملة $(n-1)$ مرة مع تحويل الكل ماعدا y_k عندئذ سوف نحصل على دالة الكثافة الاحتمالية للإحصاء المرتب والذي يأخذ الشكل..

$$g(y_k) = n\, C_{k-2}^{n-1} (F_x(y_k))^{k-1} (1-F_x(y_k))^{n-k} f_x(y_k) \quad ; \quad a<y_k<b$$

وهي الحالة الخاصة إذا كانت $k=1$ عندئذ نحصل على دالة الكثافة الاحتمالية للإحصاء المرتب الأصغر أي

$$k=1 \Rightarrow g(y_n) = n(1-F_x(y_1))^{n-1} f_x(y_1)$$

$$k=n \Rightarrow g(y_n) = n(F_x(y_n))^{n-1} f_x(y_n) \qquad a<y_n<b$$

مثال: افرض أنه لدينا مجتمعاً احصائياً موصوف بدالة الكثافة الاحتمالية ولنأخذ عينة عشوائية حجمها $n=5$ ولتكن:

$$0 < Y_1 < Y_2 < \underset{\text{الوسيط}}{\underline{Y_3}} < Y_4 < Y_5 < 1$$

الاحصائيات المرتبة الموافقة للعينة التي حجمها 5 عندئذ المطلوب

1. عين دالة الكثافة الاحتمالية للاحصاء المرتب الأصغر..
2. عين دالة الكثافة الاحتمالية للإحصاء المرتب الأعظم.
3. عين دالة الكثافة الاحتمالية للإحصاء المرتب Y_3..

/ /

الحل: لدينا الدالة التوزيعية للمجتمع هي: $F_X(x) = x^2 \quad 0 < x < 1$

وبالتالي نجد أن:

$$g(y_1) = 5(1 - F_X(y_1))^4 f_X(y_1) \qquad 0 < y_1 < 1$$

$$= 5(1 - y_1^2)^4 \, 2y_1 \quad , \quad 0 < y_1 < 1$$

$$= 10 y_1 (1 - y_1^2)^4 \qquad 0 < y_1 < 1$$

} المرتب الأصغر

$$g(y_5) = 5(F_X(y_5))^4 f_X(y_5) \; : \quad 0 < y_5 < 1$$

$$= 5 y_5^8 \cdot 2y_5 = 10 y_5^9 \quad : \quad 0 < y_5 < 1$$

} المرتب الأعظم

$$g(y_3) = 5C_2^4 (F_X(y_3))^2 (1 - F_X(y_3))^2 f(y_3) \; . \quad 0 < y_3 < 1$$

$$= 5 \frac{4!}{2!\,2!} (y_3^2)^2 (1 - y_3^2)^2 \cdot 2y_3 \quad , \quad 0 < y_3 < 1$$

$$= 60 y_3^5 (1 - y_3^2)^2 \quad : \quad 0 < y_3 < 1$$

تمرين: نفرض لدينا مجتمع احصائي موصوف بدالة الكثافة الاحتمالية $f_X(x) = e^{-x} \; : \; x > 0$ ولنأخذ عينة عشوائية حجمها $n = 5$ ولتكن $0 < X_1 < X_2 < X_3 < X_4 < X_5 < \infty$ الاحصاءات المرتبة المرافقة للعينة العشوائية المرتبة والمطلوب:

1) عيّن دالة الكثافة الاحتمالية للإحصاء المرتب الأصغر y_1 ؟

2) عيّن دالة الكثافة الاحتمالية للإحصاء المرتب الأعظم y_5 ؟

3) عيّن دالة الكثافة الاحتمالية للإحصاء المرتب الأوسط y_3 ؟

الحل: لدينا الدالة التوزيعية للمجتمع $F_X(x) = 1 - e^{-x} \quad x > 0$

$$g(y_1) = 5(1 - F_X(y_1))^4 f_X(y_1) \qquad y_1 > 0$$

$$= 5(1 - (1 - e^{-y_1}))^4 \; e^{-y_1} \qquad y_1 > 0$$

$$= 5 e^{-5y_1} \qquad y_1 > 0$$

$$g(y_5) = 5(F_X(y_5))^4 f_X(y_5) \quad : \quad y_5 > 0$$

$$= 5(1 - e^{-y_5})^4 \; e^{-y_5} \quad : \quad y_5 > 0$$

$$= 5 e^{-y_5} (1 - e^{-y_5})^4 \quad : \quad y_5 > 0$$

/ /

$$g(y_5) = 5C_2^4 (F_x(y_5))^2 \cdot (1 - F_x(y_3)^2) f_x(y_5) \quad y_5 > 0$$
$$= 30 (1 - e^{-y_1})^2 (1 - (1 - e^{-y_5}) e^{-y_5} \quad y_5 > 0 .$$

دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة :

نفرض أنه لدينا دالة الكثافة الاحتمالية لأي مشتركين

إذا كان لدينا مجتمع احصائي موصوف بدالة كثافة احتمالية

$f(x, \alpha) \quad ; \quad a < x < b$

$X_1 , X_2 , \ldots X_n$

ولنأخذ عينة عشوائية

$a < X_1 < X_2 \ldots < Y_{2-1} < Y_1 < \ldots < Y_{3-1} < Y_3 < Y_3 < \ldots X_n < b$

بالمكاملة مع الاحصاءات الأخرى نشتق y_1 , y_3

$$g(y_1, y_3) = \frac{n!}{(i-1)!\,(J-(-1))!\,(n-J)!} \underbrace{(F_x(y_i))^{i-1}}_{P_1}$$

قاعدة

$P_1 + P_2 + P_3 = 1$

$$\underbrace{(F_x(y_J) - F_x(y_i))}_{P_2}{}^{J-i-1} \, [\underbrace{1 - F_x(y_J)}_{P_3}]^{n-J}$$

$f_x(y_i) \, f_y(y_J) \quad ; \quad a < y_i < y_5 < b$

$$g(y_1, y_n) = \frac{n!}{0!\,(n-2)!\,0!} (y_1)^0 (y_n - y_1)^{n-2} (1 - y_n)^0$$
$0 < y < y_n < 1$
$$= n(n-1)(y_n - y_1)^{n-2} \quad 0 < y_1 < y_n < 1$$

$$= 20 (y_5 - y_1)^3 \; ; \quad 0 < y_1 < y_5 < 1$$

نهاية المحاضرة